

# Master 1 Informatique – Compléments de Maths

## Rattrapage

L'énoncé est recto-verso

Une feuille A4 autorisée

Durée 2 heures

Vous rédigerez les parties 1 et 2 sur deux feuilles séparées

Aucun appareil électronique autorisé

Toute réponse doit être prouvée et/ou justifiée. La qualité et la précision de la rédaction seront largement pris en compte dans la notation.

## 1 Partie 1 - Algèbre et Arithmétique

### Exercice 1 *Questions de cours*

1. Décrire proprement un ensemble  $A$  de votre choix ainsi qu'une loi de composition sur cet ensemble pour laquelle il existe un élément neutre, qui est associative et non-commutative. Justifier.
2. Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi de composition  $\circ$ . Rappeler la définition d'un élément neutre dans  $E$  pour  $\circ$ . Montrer que l'élément neutre de  $E$  pour la loi  $\circ$ , s'il existe est unique.
3. Rappeler la définition d'un groupe.
4. Soit  $G$  un groupe tel que  $g^2 = e$  pour tout  $g \in G$  et où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ . Montrer que  $G$  est un groupe abélien.

### Exercice 2 *Systèmes d'équations*

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} x = 8 & \text{mod } 15 \\ x = 5 & \text{mod } 6 \\ x = 3 & \text{mod } 4 \end{cases}$$

### Exercice 3 *Un calcul*

1. Calculer  $3^{723} \text{ mod } 123$ .

## 2 Partie 2 - Combinatoire et Probabilité

### Exercice 4 *Probabilité*

Soit  $X$  une v.a. correspondant à un dé normal à 6 faces. Idem pour  $Y$ . On construit la v.a.  $Z$  en lançant les deux dés  $X$  et  $Y$  et  $Z = |X - Y|$  (où  $|X - Y|$  est la valeur absolue de  $X - Y$ ).

1. Donner la moyenne de  $Z$ .
2. Si  $X$  et  $Y$  sont des dés à 4 faces, quelle est la moyenne de  $Z$ ?
3. Si  $X$  et  $Y$  sont des dés à  $2 \times k$  faces, quelle est la moyenne de  $Z$ ?

### Exercice 5 *Combinatoire*

Un graphe  $G$  à  $n$  sommets est appelé graphe Un-Deux si  $G$  est non orienté et tous les sommets sont de degré 1 ou 2. De plus, on note  $S(G) = (u, d)$  où  $u$  est le nombre de sommets de degré 1 et  $d$  le nombre de sommets de degré 2.

1. Donner tous les graphes possibles pour  $n = 1, 2, 3$  et 4. Et donner leur couple  $(u, d)$ .
2. Construire un graphe  $G$  tel que  $S(G) = (2, 3)$ .
3. Donner deux conditions nécessaires sur  $(u, d)$  pour que  $(u, d)$  corresponde à un graphe Un-Deux à  $n$  sommets.
4. Dans un graphe Un-Deux, combien d'arêtes au maximum peut-on rajouter tout en conservant la propriété d'être un graphe Un-Deux?