Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines
Université Paris-Saclay

Lundi 5 juin 2023

Master 1 Informatique – Compléments de Maths

L'énoncé est recto-verso
Deux feuilles A4 autorisées
Durée 1 heure 30
Vous rédigerez les parties 1 et 2 sur deux feuilles séparées
Toute réponse doit être prouvée et/ou justifiée

1 Partie 1 - Algèbre et Arithmétique

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note 0 le neutre pour la loi $+$ et 1 le neutre pour la loi $\times$. Montrer (proprement, on veillera à détailler **toutes** les étapes de calcul, et toutes les propriétés utilisées qui ne doivent découler **que** de la définition d'un anneau) les règles de calcul suivantes : pour tout a, b, c dans A,
   (a) $a0 = 0a = 0$
   (b) $(a)(-b) = -(ab) = (-a)(b)$
   (c) $(a - b)c = ac - bc$
   (d) $a(b - c) = ab - ac$
2. Soit $(G, \times)$ un groupe. Montrer qu'une intersection de deux sous-groupes est toujours un sous-groupe. On veillera à faire une preuve détaillée, la qualité de la rédaction est primordiale.

Exercice 2 *Théorème des restes chinois*

1. Si $x = 9 \mod 12$, à combien est congru x modulo 3 ? Et modulo 4 ? On veillera à détailler la réponse en revenant à la définition du modulo.
2. Donner une solution, si elle existe, du système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} x &= 5 \mod 8 \\ x &= 6 \mod 15 \\ x &= 9 \mod 12 \end{cases}$$

Exercice 3 *Arithmétique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

1. Combien y a-t-il d'éléments inversibles pour la loi $\times$ (multiplication) dans $\mathbb{Z}/513\mathbb{Z}$?
2. Donner un élément inversible pour la loi $\times$ dans $\mathbb{Z}/513\mathbb{Z}$ qui n'est pas 1.
3. Quelles sont les tailles possibles de tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/513\mathbb{Z})^*$?
4. Déterminer l'ordre de 2 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/513\mathbb{Z})^*$.

2 Partie 2 - Combinatoire et Probabilité

Exercice 4 *Combinatoire*
Soit un groupe de $n > 2$ personnes.

1. Combien y a-t-il d'ensembles de trois personnes ?
2. Soit x une personne qui est amie avec b personnes et n'est pas amie avec les r autres ($b + r = n - 1$). De combien de façons différentes peuvent se répartir les amies et les pas amies de x ?
3. Même question, si on ne connaît pas le nombre d'amies de x.

On modélise ce problème par un graphe complet G à n sommets. Les sommets sont les personnes et chaque arête est soit bleue (les personnes sont amies) soit rouge (les personnes ne sont pas amies). On dit qu'un triangle formé par trois sommets de G est monocolore si les trois arêtes du triangle sont de la même couleur.

4. Dessiner un graphe à 3 sommets, sans triangle monocolore.
5. Dessiner un graphe à 4 sommets, sans triangle monocolore.
6. Dessiner un graphe à 5 sommets, sans triangle monocolore.
7. Montrer que si un sommet est lié à trois autres sommets ou plus par une arête bleue, alors il y a un triangle monocolore dans le graphe.
8. Pour quelles valeurs de n est-on sûr d'avoir au moins un triangle monocolore ?

Exercice 5 *Probabilités*

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}^+$ tels que $f(x) = Cx(1-x)$.

1. Soit $E = [0,1]$, pour quelle valeur de C, f est une fonction de densité continue sur E ?
2. Soit X une v.a. de densité f, montrer que $\mathbb{P}(x < a) = \mathbb{P}(x > 1-a)$ pour tout $a \in E$.
3. En déduire la valeur de $E[X]$.
4. Calculer $E[X]$ avec la définition usuelle.

On veut maintenant discrétiser la densité f en définissant une densité discrète g sur l'intervalle $E_{\text{DIS}} = \{n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 9\}$.
Soit X une v.a. de densité f et Y une v.a. de densité g.

5. Expliquez comment calculer g pour que
$$\forall n \in E_{\text{DIS}},\ \mathbb{P}(n < X < n+1) = \mathbb{P}(Y = n)$$
et calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
6. Montrer que
$$\forall n \in E_{\text{DIS}},\ \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y = 9-n)$$
7. En déduire que
$$\mathbb{P}(Y = 9 | Y \geq 5) = 2 \times \mathbb{P}(Y = 0)$$