

Master 1 Informatique – Compléments de Maths

L'énoncé est recto-verso

Une feuille A4 autorisée

Durée 2 heures

Vous rédigerez les parties 1 et 2 sur deux feuilles séparées

Aucun appareil électronique autorisé

Toute réponse doit être prouvée et/ou justifiée. La qualité et la précision de la rédaction seront largement pris en compte dans la notation.

1 Partie 1 - Algèbre et Arithmétique

Exercice 1 *Groupe*

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et \circ la loi dans G définie par

$$(x, y) \circ (x', y') = (xx', xy' + y).$$

1. Montrer que G muni de la loi \circ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ muni de la loi induite de \circ est un sous-groupe de G .

Exercice 2 *Structure de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

1. Rappelez la formule mathématique qui permet de décomposer tout entier en produit de facteurs premiers.
2. Donnez la décomposition en facteurs premiers de 2376.
3. Donnez le nombre d'éléments inversibles pour la multiplication dans $\mathbb{Z}/2376\mathbb{Z}$. Justifier précisément.
4. Calculez, s'ils existent, l'inverse de 43 et de 51 dans $\mathbb{Z}/2376\mathbb{Z}$.
5. Calculez $43^{1437} \pmod{2376}$.

2 Partie 2 - Combinatoire et Probabilité

Exercice 3 *Combinatoire*

Soit un graphe non orienté sans boucle à n sommets distingués (les sommets ont tous des noms différents). Entre deux sommets, soit il n'y a pas d'arête, soit il y a une arête bleue, soit il y a une arête rouge.

1. Donner tous les graphes possibles pour $n = 1$.
2. Même question pour $n = 2$.
3. Même question pour $n = 3$.
4. On note $H(n)$ le nombre de graphes possibles pour n sommets. Prouver par récurrence que :

$$\forall n > 0, H(n) = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

5. Que vaudrait $H(n)$ si au lieu d'avoir deux couleurs pour les arêtes, il y en avait k .

Exercice 4 *Probabilités*

Soit un dé à six faces et une pièce. Les deux ne sont pas truqués. La valeur du dé est celle habituelle et définit la v.a. X , la valeur de la pièce est 0 pour pile et 7 pour face et définit la v.a. Y .

1. Quelle est la moyenne de X ?
2. Quelle est la moyenne de Y ?
3. Soit $Z = X + Y$, quel est l'espace d'état de Z , quelle est sa fonction de densité, quelle est sa moyenne ?
4. Soit $T = \min(X, Y)$, quel est l'espace d'état de T , quelle est sa fonction de densité, quelle est sa moyenne ?