Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines Jeudi 20 octobre 2022
Université Paris-Saclay

Master 1 Informatique – Compléments de Maths

L'énoncé est recto-verso
Deux feuilles A4 autorisées
Durée 1 heure 30
Vous rédigerez les parties 1 et 2 sur deux feuilles séparées
Toute réponse doit être prouvée et/ou justifiée

1 Partie 1 - Algèbre et Arithmétique

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Donner deux exemples de groupes. Justifier pourquoi ce sont des groupes.
2. Pour chacun de ces groupes, donner un sous-groupe non trivial si un tel sous-groupe existe. Sinon dîtes pourquoi il n'y a pas de sous-groupe trivial.
3. Soit $(G, \times)$ un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G pour la loi $\times$. Montrez que $H \cup K$ est un sous-groupe si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$. La qualité de la rédaction sera primordiale dans la notation de cette question.

Exercice 2 *Théorème des restes chinois*

1. Si $x = 3 \mod 12$, à combien est congru x modulo 3 ? Et modulo 4 ?
2. Donner une solution, si elle existe, du système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} x & = 5 \mod 8 \\ x & = 6 \mod 15 \\ x & = 3 \mod 12 \end{cases}$$

Exercice 3 *Arithmétique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

1. Combien y a-t-il d'éléments inversibles pour la loi $\times$ (multiplication) dans $\mathbb{Z}/425\mathbb{Z}$?
2. Donner un élément inversible pour la loi $\times$ dans $\mathbb{Z}/425\mathbb{Z}$ qui n'est pas 1.
3. Donner (facilement) un élément du groupe multiplicatif $\left((\mathbb{Z}/425\mathbb{Z})^{\times}, \times\right)$ d'ordre inférieur à 40.

2 Partie 2 - Combinatoire et Probabilité

Exercice 4 *Combinatoire*
Soit un ensemble de $n > 2$ personnes.

1. Combien y a-t-il d'ensembles de trois personnes ?
2. Soit x une personne qui est amie avec b personnes et n'est pas amie avec les r autres ($b + r = n - 1$). De combien de façons différentes peuvent se répartir les amies et les pas amies de x ?
3. Même question, si on ne connaît pas le nombre d'amies de x.

On modélise ce problème par un graphe complet G à n sommets. Les sommets sont les personnes et chaque arête est soit bleue (les personnes sont amies) soit rouge (les personnes ne sont pas amies). On dit qu'un triangle formé par trois sommets de G est monocolore si les trois arêtes du triangle sont de la même couleur.

4. Dessiner un graphe à 3 sommets, sans triangle monocolore.
5. Dessiner un graphe à 4 sommets, sans triangle monocolore.

6. Dessiner un graphe à 5 sommets, sans triangle monocolore.
7. Montrer que si un sommet est lié à trois autres sommets ou plus par une arête bleue, alors il y a un triangle monocolore dans le graphe.
8. Pour quelles valeurs de n est-on sûr d'avoir au moins un triangle monocolore ?

Exercice 5 *Probabilités*
Soit $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ de A dans $\mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}^+$ telles que $f(x) = Cx(1-x)$.

1. Pour quelle valeur de C, f est une fonction de densité continue sur A ?
2. Soit X une v.a. de densité f, montrer que $\mathbb{P}(x < a) = \mathbb{P}(x > 1-a)$ pour tout $a \in A$.
3. En déduire la valeur de $E[X]$.
4. Calculer $E[X]$ avec la définition usuelle.

On veut maintenant discrétiser la densité f en définissant une densité discrète g sur l'intervalle $A_{\text{DIS}} = \{n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 9\}$. Soient X une v.a. de densité f et Y une v.a. de densité g.

5. Expliquez comment calculer g pour que
$$\forall n \in A_{\text{DIS}},\ \mathbb{P}(n < 10 \times X < n+1) = \mathbb{P}(Y = n)$$
et calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
6. Montrer que
$$\forall n \in A_{\text{DIS}},\ \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y = 9-n)$$
7. En déduire que
$$\mathbb{P}(Y = 9 | Y \geq 5) = 2 \times \mathbb{P}(Y = 0)$$