Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines le _ _ / _ _ / 2023
Université Paris Saclay Groupe de TD __

Master 1 Informatique 2023–2024
Compléments de maths

Correction CC2 TD1 et 2

Questions :

1. Soit $E =]-1, 1[$ et $*$ une loi de composition définie sur E par :
$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = \frac{x+y}{1+xy}\,.$$
Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
2. Soit $(G, *)$ un groupe quelconque. Montrer qu'une intersection quelconque de sous-groupes de G est encore un sous-groupe de G.

Réponse :

Montrer que E muni de la loi $*$ est un groupe. Pour montrer cela, nous devons montrer que
(i) il existe un élément neutre ;
(ii) la loi est associative ;
(iii) tout élément possède un inverse ;
(iv) la loi $*$ est commutative.

Il est important de montrer les choses dans l'ordre, notamment le (i) avant (iii), car l'inverse est défini à partir de l'élément neutre.

Tout d'abord, on remarque que pour tout $x \in E$, on a
$$\frac{x+0}{1+x\times 0} = x = \frac{0+x}{1+x\times 0}$$
(on n'oublie pas que, pour la définition de l'inverse, il faut satisfaire deux égalités : une à gauche et une à droite) Ainsi, on a trouvé l'élément neutre $e = 0 \in E$.

Ensuite (ii) : on doit montrer que la loi est associative, c'est à dire que pour tout $x, y, z \in E$, $(x*y)*z = x*(y*z)$.

Soient $x, y, z \in E$, alors
$$(x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$
et
$$x*(y*z) = x * \left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$
Donc la loi est associative.

Ensuite (iii) : on doit montrer que tout élément possède un inverse dans E. Soit $x \in E$, alors $-x \in E$, car $E =]-1, 1[$ (où le $-$ est l'opposé de x). Et on a
$$x * (-x) = \frac{x-x}{1-x^2} = 0$$
Comme 0 est l'élément neutre pour la loi $*$, on a montré que tout élément possède un inverse (c'est son opposé).

Enfin (iv), pour la commutativité, on peut conclure en disant que l'addition et la multiplication sont aussi commutatives, et que donc pour tout $x, y \in E$, on a
$$x * y = fracx + y1 + xy = \frac{y+x}{1+yx} = y * x$$

Montrer que l'intersection de deux sous-groupes est toujours un sous-groupe. Dans cette preuve, on va utiliser la caractérisation des sous-groupes, c'est à dire que H est un sous-groupe de $(G, \circ)$ si et seulement si H est non vide et $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$.

Soit $(G, \circ)$ un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G. On sait qu'un sous-groupe possède l'élément neutre e (qui est unique). Ainsi $e \in H$ et $e \in K$ car H et K sont deux sous-groupes de G. Donc $e \in H \cap K$. En particulier $H \cap K$ est non vide. Comme $H \cap K$ est non vide, on peut fixer des éléments arbitraires dans $H \cap K$.

Soient maintenant $x, y \in H \cap K$. Alors $x \in H$ (i), $x \in K$ (ii), $y \in H$ (iii) et $y \in K$ (iv). D'après la caractérisation des sous-groupes appliquée et en utilisant (i) et (iii), $xy^{-1} \in H$. De la même manière en utilisant (ii) et (iv), on a $xy^{-1} \in K$. Donc $xy^{-1} \in H \cap K$.

On a donc montré que $H \cap K$ est non vide et que pour tout $x, y \in H \cap K$, $xy^{-1} \in H \cap K$. D'après la caractérisation des sous-groupes (qui est une équivalence), on peut affirmer que $H \cap K$ est un sous-groupe.