Université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines
Université Paris Saclay

le 20 / 09 / 2023
Groupe de TD 1 et 2

Master 1 Informatique 2023–2024
Compléments de maths

Corrigé du CC1 - Groupes de TD 1 et 2

Question :

Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Réponse :

Posons :

$$\forall n \geq 0, \quad A(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 \quad \text{ et } \quad \forall n \geq 0, \quad B(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Il faut donc montrer que :

$$\forall n \geq 0, \quad A(n) = B(n)$$

<u>Conseil de rédaction</u> : *il ne faut pas hésiter à rajouter des notations si c'est pour augmenter la clarté de la rédaction. Ci-dessus, $A(n)$ et $B(n)$, prennent des valeurs numériques. On pourrait aussi ajouter une propriété :*

$$P(n): \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

dans ce cas $P(n)$ ne prend pas de valeur numérique mais une valeur booléenne.

1. Initialisation

On vérifie que l'égalité est vraie pour $n = 0$: $A(0) = \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0$ et $B(0) = \frac{0\times1\times1}{6} = 0$. Donc $A(0) = B(0)$.

2. Hérédité

<u>Conseil de rédaction</u> : *il est préférable d'utiliser une nouvelle variable K, pour éviter d'être confus en utilisant n.*

Supposons qu'il existe $K \geq 0$ tel que $A(K) = B(K)$, on va montrer que $A(K+1) = B(K+1)$, pour cela :

ÉTAPE 1 : calcul de $A(K+1)$

<u>Conseil de rédaction</u> : *chaque étape du calcul est justifiée.*

$$\begin{aligned}
A(K+1) &= \sum_{i=0}^{K+1} i^2 && \text{(par définition de A(K+1))} \\
&= \sum_{i=0}^{K} i^2 + (K+1)^2 && \text{(en découpant la somme en deux parties)} \\
&= A(K) + (K+1)^2 && \text{(par définition de A(K))} \\
&= B(K) + (K+1)^2 && \text{(en utilisant l'hypothèse de récurence)} \\
&= \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} + (K+1)^2 && \text{(par définition de B(K))} \\
&= \frac{(K+1)}{6}(K(2K+1) + 6(K+1)) && \text{(en factorisant (K+1)/6)} \\
&= \frac{(K+1)}{6}(2K^2 + 7K + 6) && \text{(en développant)}
\end{aligned}$$

ÉTAPE 2 : calcul de $B(K+1)$

Conseil de rédaction : *si des étapes sont des manipulations usuelles comme factoriser, développer, ..., il n'est pas absolument nécessaire de les justifier.*

$$\begin{aligned} B(K+1) &= \frac{(K+1)(K+2)(2(K+1)+1)}{6} && \text{(par définition de B(K+1))} \\ &= \frac{(K+1)}{6}(K+2)(2K+3) \\ &= \frac{(K+1)}{6}(2K^2+7K+6) \end{aligned}$$

La valeur obtenue pour $A(K+1)$ à la fin de l'étape 1 et celle obtenue pour $B(K+1)$ à la fin de l'étape 2 sont égales donc :

$$A(K+1) = B(K+1)$$

Conclusion

Conseil de rédaction : *il est important de rappeler le résultat final auquel vous vouliez arriver.*

On a donc montré que :

$$\begin{cases} A(0) = B(0) \\ \forall K \geq 0, \quad A(K) = B(K) \quad \Longrightarrow A(K+1) = B(K+1) \end{cases}$$

ce qui conclu la preuve.