M1 Info Man Maths – Probabilités

Franck Quessette – Franck.Quessette@uvsq.fr

Université de Versailles – Saint-Quentin
Université Paris Saclay

2024 – 2025

Organisation de l'UE

- Combinatoire : 1 CM et 1 TD ;
- Probabilités : 2CM et 1TD ;

Probabilité

Aléatoire et stochastique

- variable aléatoire ;
- fonction de masse, de densité, de répartition ;
- lois ;
- composition de variables aléatoires ;
- statistiques.

Variable aléatoire

Vision opérationnelle :

- Une boîte avec un afficheur.
- Une fonction qui renvoie une valeur.
- Notation : X que l'on appelle une variable aléatoire (v.a.), en anglais random variable (r.v.).

Caractérisation des valeurs affichées, renvoyées :

- E ensemble des valeurs possibles.
- E peut être discret fini : un dé, une pièce.
- E peut être discret infini : loi de Poisson.
- E peut être continu : loi exponentielle, loi de Gauss (présenté ici mais pas à l'examen).

Comment caractériser les fréquences, probabilités des valeurs ?

E discret

Pour tout n de E discret, on note :

$$\mathbb{P}(X = n) = \text{la probabilité que } X \text{ prenne pour valeur } n.$$

On a :

$$\forall n \in E, \quad 0 \leq \mathbb{P}(X = n) \leq 1$$

et

$$\sum_{n \in E} \mathbb{P}(X = n) = 1$$

Exemple pour E discret fini

- X est un lancer de dé à 6 faces :
  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\forall n \in E,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{6}$.
- X est un lancer de pièce :
  $E = \{pile, face\}$ et $\forall n \in E,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2}$.
- dé à K faces.
- pièce truquée.

Loi Uniforme

Afin d'étudier, manipuler, utiliser, regrouper des v.a. similaires, on définit des lois :
Loi $\boxed{\textbf{Uniforme}(a, b)}$, $a \leq b \in \mathbb{N}$: ensemble des v.a. X dont l'espace d'état est $E = [a..b]$ et
$\forall n \in E,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{|E|} = \frac{1}{b-a+1}$

- Un lancer de dé est une v.a. qui suit une loi Uniforme$(1, 6)$
- Un lancer de pièce est une v.a. qui suit une loi Uniforme$(0, 1)$ en notant 0 pour face et 1 pour pile.

Loi de Bernoulli

Loi $\boxed{\textbf{Bernoulli}(p)}$, $p \in [0,1]$ (p est un réel) : ensemble des v.a. X dont l'espace d'état est $E = \{0,1\}$ et
$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$
$\mathbb{P}(X=1) = p$

- Un lancer de pièce est une v.a. qui suit une loi Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Un lancer de pièce truquée est une v.a. qui suit une loi Bernoulli(p).

Loi binomiale

Loi $\boxed{\textbf{binomiale}(p, K)}$, $p \in]0,1[$, (p est un réel) et $K \in \mathbb{N}^*$:

- ensemble des v.a. X dont l'espace d'état est $E = [0..K]$ et $\forall n \in E,\ \mathbb{P}(X = n) = \binom{K}{n} p^n (1-p)^{K-n}$

Noter que :

$$\sum_{n=0}^{K} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{K} \binom{K}{n} p^n (1-p)^{K-n} = (p + (1-p))^K = 1$$

Loi $\boxed{\textbf{Poisson}(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$:

- ensemble des v.a. dont l'espace d'état est $E = \mathbb{N}$ et $\forall n \in E,\ \mathbb{P}\left(X = n\right) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!}$

Noter que le développement de e^x est :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fonction de densité discrète ou de masse – fonction de répartition

Pour une v.a. X sur un espace E, la **fonction de densité discrète** ou **fonction de masse** f_X est :

$$\forall n \in E,\ f_X(n) = \mathbb{P}(X = n)$$

Si E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, il est parfois utile d'étendre f_X à l'ensemble $\mathbb{Z}$, en posant : $\forall n \in \mathbb{Z}, n \notin E,\ f_X(n) = 0$.

Pour une v.a. X sur un espace ordonné E, la **fonction de répartition** F_X est :

$$\forall n \in E,\ F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{i \leq n} f_X(n)$$

Moyenne, variance moments

Soit X une v.a. sur un espace E, la $\boxed{\textbf{moyenne}}$ de X est :

$$\mathbb{E}[X] = m_X = \sum_{n \in E} n \ f_X(n)$$

$\mathbb{E}$ est l'opérateur d'espérance.
Plus généralement pour toute fonction g de $E \to \mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{E}[g(X)] = m_X = \sum_{n \in E} g(n) \ f_X(n)$$

Si $g(X) = X^k$, $\mathbb{E}[X^k]$ est le $k$ème moment.
Si $g(X) = (X - m_X)^k$, $\mathbb{E}[(X - m_X)^k]$ est le $k$ème moment centré.

E continu

Comment définir les probabilités des éléments de E quand E est continu ?
Comme pour E discret, pour une v.a. X sur un espace ordonné E, la **fonction de répartition** F_X est :

$$\forall z \in E,\ F_X(z) = \mathbb{P}(X \leq z) = \mathbb{P}(X < z)$$

La **fonction de densité** est définie par :

$$\forall z \in E,\ f_X(z) = F'_X(z)$$

on suppose que F_X est dérivable en tout point de E.
On a donc :

$$\forall z \in E,\ F_X(z) = \int_{t<z} f_X(t)dt$$

en discret on :

$$\forall n \in E,\ F_X(n) = \sum_{i<n} f_X(i)$$

Relations si E

- $\forall y, z \in E$ avec $y \leq z$, $F_X(y) \leq F_X(z)$
- $f_X(z) \geq 0$
- Si E est discret $f_X(z) \leq 1$ mais pas nécessairement en continu (densité et non pas masse).
- Si E est continu $\int_E f_X(t)dt = 1$
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- Si E est discret $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \sum_{i=a+1}^{b} f_X(i)$.
- Si E est continu $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)dt$.

Loi exponentielle

Loi $\boxed{\mathbf{exp}(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$:

- loi des durées entre deux événements indépendants et identiquement distribués, par exemple : durées de entre deux connections à un site web, durée entre deux voitures la nuit, ...
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ (et 0 sinon)
- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ (et 0 sinon)
- sa moyenne est $\frac{1}{\lambda}$
- son écart type est $\frac{1}{\lambda}$

La loi exponentielle est la seul qui a la propriété sans mémoire :

$$\mathbb{P}(X < t + t_0 | X > t_0) = \mathbb{P}(X < t)$$

Loi $\boxed{\textbf{normale}(\mu, \sigma^2)}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$:

- $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
- sa moyenne est μ
- son écart type est σ
- on l'appelle aussi loi de Gauss

Loi uniforme continue

Loi $\boxed{\textbf{uniforme continue}(a, b)}$, $a < b \in \mathbb{R}$:

- $$f(x) = \frac{1}{b-a}$$
- sa moyenne est $\frac{a+b}{2}$
- son écart type est 0
- on travaille souvent avec uniforme continue$(0, 1)$, sa fonction de densité est $f(x) = 1$.

Composition de loi

Règle d'or : rien n'est intuitif.

- Si X_1 et X_2 suivent une loi uniforme (a,b), aucune des variables ci-dessous ne suit une loi uniforme
  - $X_1 + X_2$
  - $X_1 \times X_2$
  - $\min(X_1, X_2)$
  - $\max(X_1, X_2)$

  Attention l'espace d'état change aussi.

Vision ensembliste

Soit $\mathcal{P}$ une population d'entités indépendantes et une propriété (on dit souvent événement) A. Chaque entité vérifie ou pas la propriété (l'événement) A.
On définit $\mathcal{P}_A$ le sous ensemble de $\mathcal{P}$ qui vérifie A.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|\mathcal{P}_A|}{|\mathcal{P}|}$$

qui s'interprète comme la probabilité qu'une entité prise au hasard uniformément vérifie la propriété A ou, de manière équivalente comme la probabilité qu'une entité soit dans l'ensemble $\mathcal{P}_A$. Dans la suite, on note A pour $\mathcal{P}_A$

Si on a deux propriétés A et B, avec les notations ensemblistes classiques : $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$ sont clairement définies.
Probabilité d'avoir un résultat pair à un lancer de dé.
Probabilité de porter des lunettes pour un·e étudiant·e de l'amphi.

Probabilité conditionelle

Pour deux événements A et B avec $\mathbb{P}(B)$ non nulle, on définit la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On dit «Probabilité de A sachant B».
Exemple probabilité d'avoir des lunettes si on est un garçon :

- $\mathcal{P}$ contient tous les étudiants de l'amphi
- A est la propriété (événement) : l'étudiant porte des lunettes
- B est la propriété (événement) : l'étudiant est un garçon

Sur un lancer de dé, probabilité d'avoir un 6 sachant que la valeur est paire.

Indépendances

Pour deux événements A et B les deux événements sont indépendants

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Autrement dit, le «contexte» d'être dans B ne change rien à la probabilité.
Ce qui revient à dire que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Pour n événements $A_1, ...A_n$, les n sont indépendants entre eux si :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Théorème de bayes

Comme

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)$$

et

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$$

On a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Énormément d'applications en informatique, par exemple le filtre bayésien https://fr.wikipedia.org/wiki/Filtrage_bayesien_du_spam

Bayes 2

Soient n événements $A_1, ..., A_n$ tels que les événements sont non vides et forment une partition. Soit B un événement, alors :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_j \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

Chaîne de Markov

Au tableau.