

M1 Info Man Maths

Franck Quessette – Franck.Quessette@uvsq.fr

Université de Versailles – Saint-Quentin
Université Paris Saclay

2023-2024

Organisation de l'UE

- ▶ Combinatoire : 1 CM et 1 TD ;
- ▶ Probabilités : 2CM et 1TD ;

Combinatoire

Étudier, énumérer, compter de collections finies d'objets.

- ▶ graphes ;
- ▶ arbres binaires ;
- ▶ mots ;
- ▶ ...

Factorielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

- ▶ factorielle de n :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0! = 1 \\ \forall n > 0, \quad n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \cdots \times n \\ \text{ou} \\ \forall n > 0, \quad n! = n \times (n-1)! \end{array} \right.$$

- ▶ Nombre d'arrangements d'une collection objets différenciés, par exemple un paquet de cartes.
- ▶ La factorielle est du même ordre de grandeur que l'exponentielle : formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \leq n$, on définit :

- ▶ coefficient binomial de n et k , $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

- ▶ Nombre de possibilités différentes de choisir k objets parmi n .

À faire en TD : vérifier que les coefficient binomiaux correspondent au triangle de Pascal pour les valeurs de n de 0 à 4.

Principe des tiroirs (Pigeonhole principle)

Soient n objets à répartir dans k tiroirs (tout objet va dans un et un seul tiroir).

- ▶ Si $n > k$ alors il y a au moins un tiroir avec au moins deux objets.
- ▶ Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| > |F|$ et si f est une application de E dans F , alors il existe un élément de F qui admet au moins deux antécédents par f ; autrement dit il n'existe pas d'application injective de E dans F .

Rappel : Une application est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément du premier ensemble est relié à un unique élément du second ensemble.

Suite arithmétique :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha_0 \\ u_n = u_{n-1} + \alpha \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

Suite géométrique :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha_0 \\ u_n = \alpha u_{n-1} \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\blacktriangleright \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\blacktriangleright \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\blacktriangleright \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} = \ln(N) + O(1) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \text{ diverge}$$

$$\blacktriangleright \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\blacktriangleright \text{Pour tout réel } r \geq 1 : \sum_{i=0}^{+\infty} r^i \text{ diverge}$$

$$\blacktriangleright \text{Pour tout réel } 0 < r < 1 : \sum_{i=0}^{+\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$$

Rappels normalement inutiles

Pour tous réels non nuls x, y :

$$y = x + 2 \iff x = y - 2$$

$$y = x \times 2 \iff x = y/2$$

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$$

$$y = 2^x \iff$$

Rappels normalement inutiles

Pour tous réels non nuls x, y :

$$y = x + 2 \iff x = y - 2$$

$$y = x \times 2 \iff x = y/2$$

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$$

$$y = 2^x \iff x = \log_2 y$$

Rappels normalement inutiles

Pour tous réels non nuls x, y :

$$y = x + 2 \iff x = y - 2$$

$$y = x \times 2 \iff x = y/2$$

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$$

$$y = 2^x \iff x = \log_2 y$$

$$y = e^x \iff x = \log_e y = \ln y$$

$$y = 10^x \iff x = \log_{10} y = \log y$$

$$\log(x \times y) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x^n) = n \log(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$\log_a(a^n) = n$$

$$\log_2(2^n) = n$$

Arbre binaire

Soit un arbre binaire complet de hauteur h . La racine est de hauteur 0.

- ▶ le nombre de nœuds à la hauteur h est 2^h .
- ▶ le nombre total de nœuds de la racine à la hauteur h est :

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

Pour stocker n nœuds dans un arbre binaire, il doit être de hauteur au moins $\log_2(n)$.

On rappelle que les différents logs sont égaux à une constante multiplicative près :

$$\log_a(n) = \frac{1}{\log_b(a)} \times \log_b(n) = \log_a(b) \times \log_b(n)$$

- ▶ Hauteur d'un arbre de binaire à n sommets.
- ▶ Recherche par dichotomie d'une valeur entre 1 et n .
- ▶ Nombres de chiffres nécessaires pour écrire un nombre n en base b .

Les ensembles

Soit E un ensemble de cardinal n .

- ▶ le nombre de sous-ensemble de taille k est : $\binom{n}{k}$
- ▶ le nombre de sous-ensembles différents est 2^n : les compter c'est équivalent à compter le nombre de nombre en binaire ayant au plus n bits.
- ▶ Combien y a-t-il de **permutations** des éléments de E ?