M1 Info Man Maths - Combinatoire

Franck Quessette – Franck.Quessette@uvsq.fr

Université de Versailles – Saint-Quentin
Université Paris Saclay

2024 – 2025

Organisation de l'UE

- Combinatoire : 1 CM et 1 TD ;
- Probabilités : 1 CM et 1TD ;

Combinatoire

Étudier, énumérer, compter de collections finies d'objets.

- graphes ;
- arbres binaires ;
- mots ;
- ...

Factorielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

- factorielle de n :

$$\begin{cases} & 0! = 1 \\ \forall n > 0, & n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n \\ & \textit{ou} \\ \forall n > 0, & n! = n \times (n-1)! \end{cases}$$

- Nombre d'arrangements d'une collection objets différenciés, par exemple un paquet de cartes.
- La factorielle est du même ordre de grandeur que l'exponentielle : formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Coefficient binomial

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \leq n$, on définit :

- coefficient binomial de n et k, $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

- Nombre de possibilités différentes de choisir k objets parmi n.

À faire en TD : vérifier que les coefficient binomiaux correspondent au triangle de Pascal pour les valeurs de n de 0 à 4.

Principe des tiroirs (Pigeonhole principle)

Soient n objets à répartir dans k tiroirs (tout objet va dans un et un seul tiroir).

- Si $n > k$ alors il y a au moins un tiroir avec au moins deux objets.
- Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|\mathrm{E}| > |\mathrm{F}|$ et si f est une application de E dans F, alors il existe un élément de F qui admet au moins deux antécédents par f ; autrement dit il n'existe pas d'application injective de E dans F.

Rappel : Une application est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément du premier ensemble est relié à un unique élément du second ensemble.

Suite arithmétique :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \alpha_0 \\ u_n = u_{n-1} + \alpha \quad \forall n > 0 \end{array} \right.$$

Suite géométrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \alpha_0 \\ u_n = \alpha u_{n-1} \quad \forall n > 0 \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} = \ln(N) + O(1)$ $\qquad \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i}$ *diverge*
- $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- Pour tout réel $r \geq 1$: $\sum_{i=0}^{+\infty} r^i$ diverge
- Pour tout réel $0 < r < 1$: $\sum_{i=0}^{+\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$

Rappels normalement inutiles

Pour tous réels positifs non nuls x, y :

$$\begin{aligned}
y = x + 2 &\iff x = y - 2 \\
y = x \times 2 &\iff x = y/2 \\
y = x^2 &\iff x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \\
y = x^n &\iff x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} \\
y = 2^x &\iff
\end{aligned}$$

Rappels normalement inutiles

Pour tous réels positifs non nuls x, y :

$$\begin{array}{lcl} y = x + 2 & \iff & x = y - 2 \\ y = x \times 2 & \iff & x = y/2 \\ y = x^2 & \iff & x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \\ y = x^n & \iff & x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} \\ y = 2^x & \iff & x = \log_2 y \end{array}$$

Rappels normalement inutiles

Pour tous réels positifs non nuls x, y :

$$
\begin{aligned}
y = x + 2 &\iff x = y - 2 \\
y = x \times 2 &\iff x = y/2 \\
y = x^2 &\iff x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}} \\
y = x^n &\iff x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}} \\
y = 2^x &\iff x = \log_2 y \\
y = e^x &\iff x = \log_e y = \ln y \\
y = 10^x &\iff x = \log_{10} y = \log y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\log(x \times y) = \log(x) + \log(y) \\
&\log(x^n) = n \log(x) \\
&\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \\
&\log_a(a^n) = n \\
&\log_2(2^n) = n
\end{aligned}
$$

Arbre binaire

Soit un arbre binaire complet de hauteur h. La racine est de hauteur 0.

- le nombre de nœuds à la hauteur h est 2^h.
- le nombre total de nœuds de la racine à la hauteur h est :

$$\sum_{1=0}^{h} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

Pour stocker n nœuds dans un arbre binaire, il doit être de hauteur au moins $\log_2(n)$.

Log

On rappelle que les différents logs sont égaux à une constante multiplicative près :

$$\log_a(n) = \frac{1}{\log_b(a)} \times \log_b(n) = \log_a(b) \times \log_b(n)$$

- Hauteur d'un arbre de binaire à n sommets.
- Recherche par dichotomie d'une valeur entre 1 et n.
- Nombres de chiffres nécessaires pour écrire un nombre n en base b.

Soit E un ensemble de cardinal n.

- le nombre de sous-ensemble de taille k est : $\binom{n}{k}$
- le nombre de sous-ensembles différents est 2^n : les compter c'est équivalent à compter le nombre de nombre en binaire ayant au plus n bits.
- Combien y a-t-il de $\boxed{\textbf{permutations}}$ des éléments de E ?