# Codes Correcteurs d'erreur

Yann Rotella

28 mars 2026

## 1 Codes et décodage

**Exercice 1.** *Distance de Hamming.*
Donner la distance de Hamming entre les deux mots suivants 100011111000 et 000011001000 lorsqu'ils sont interprétés comme :

- deux éléments de $\mathbb{F}_2^{12}$
- deux éléments de $\mathbb{F}_4^{6}$
- deux éléments de $\mathbb{F}_8^{4}$
- deux éléments de $\mathbb{F}_{16}^{3}$

**Exercice 2.** *Un code.*
On considère le code binaire où on transmet 9 bits effectifs avec 16. Les 9 bits transmis sont notés de $b_1$ à $b_9$ et sont encodés en $c_1, \ldots, c_{16}$ où $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2$, $c_3 = b_3$, $c_4 = b_1 + b_2 + b_3$, $c_5 = b_4$, $c_6 = b_5$, $c_7 = b_6$, $c_8 = b_4 + b_5 + b_6$ et de même $c_9 = b_7$, $c_{10} = b_8$, $c_{11} = b_9$ et $c_{12} = b_7 + b_8 + b_9$. Enfin les quatre autres bits sont calculés en réalisant $c_{13} = b_1 + b_4 + b_7$, $c_{14} = b_2 + b_5 + b_8$, $c_{15} = b_3 + b_6 + b_9$ et $c_{16} = c_4 + c_8 + c_{12}$.

- Donner une matrice génératrice de ce code
- Encoder le mot 100111000.
- Décoder le mot 0110101101100011.

**Exercice 3.** *Un autre code.*
On considère le code $\mathcal{C}$ binaire de matrice génératrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Donner tous les mots du code. Donner sa distance minimale et dire combien d'erreurs on peut corriger.
- Calculer les syndromes des mots de poids 1.
- Décoder le mot 1111011.

**Exercice 4.** *Idem.*
On considère le code $\mathcal{C}$ binaire de matrice génératrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner tous les mots du code. Donner sa distance minimale et dire combien d'erreurs on peut corriger.

**Exercice 5.** *Énumérateur de poids.*
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Combien y'a t'il de mots de $\mathbb{K}^n$ de poids $i$ ?

**Exercice 6.** *Décodage de code.*
Soit le code $\mathcal{C}$ de matrice génératrice $G$ avec

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le code $\mathcal{C}$ est-il systématique ? Donner une matrice de parité pour le code $\mathcal{C}$. Donner la distance minimale du code. Calculer le syndrome du mot 1111000. Peut-on décoder ce mot ?

**Exercice 7.** *Code cyclique.*
Soit $P(X) = X^4 + X + 1$.
— Montrer que $P$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
— Montrer que $P$ est un diviseur de $X^{15} + 1$
— Soit $\mathcal{C}$ le code cyclique engendré par $P$. Donner sa longueur et sa dimension.
— Encodre le polynôme $X^{10} + X^7 + X^5 + X^4 + X + 1$.
— Donner la matrice génératrice de $\mathcal{C}$.

**Exercice 8.** *Code BCH.*
On reprend l'exercice précédent. Soit $\beta$ un générateur de $\mathbb{F}_{16}$.
— Montrer que $\beta^2$ et $\beta^4$ sont aussi racines de $X^4 + X + 1$. Montrer que $\beta^3$ est racine de $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
— Montrer que $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ est un diviseur de $X^{15} + 1$.
— Donner alors 4 racines consécutives du polynôme $(X^4 + X + 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$.
— Donner la distance minimale, la dimension et la matrice génératrice du code cyclique engendré par $X^8 + X^7 + X^6 + X^4 + 1$.