

TD 3 : Capacité de canaux - Exercices

Yann ROTELLA

2026

Exercice 1. *Calcul de capacité.*

Calculer les capacités des différents canaux suivants.

1. Le canal du dactylographe (typewriter) : on a un alphabet avec K lettres et à chaque fois, le dactylographe touche une touche adjacente avec une probabilité de $1/3$ (deux touches sont adjacentes).
2. Le canal binaire symétrique avec probabilité d'erreur q
3. Le canal binaire à effacement avec probabilité d'erreur q

Exercice 2. *Simuler un canal avec un autre.*

On va analyser le Z -canal.

1. Donner la capacité du Z -canal avec probabilité d'erreur q . Que se passe t'il quand q tend vers 1 ?
2. Montrer que l'on peut utiliser un code de longueur 2 et de dimension 1 et l'utilisation du Z -canal pour simuler un canal binaire à effacement. Donner la capacité de ce canal binaire à effacement.
3. En déduire que la capacité du Z -canal est supérieure à $\frac{1}{2}(1 - q)$ bits. Comparez avec ce que vous avez fait à la question 1.

Exercice 3. *Canaux avec mémoire ont une plus grande capacité.*

On considère un canal binaire symétrique avec $Y_i = X_i + Z_i \pmod{2}$ où les X_i, Y_i, Z_i sont des v.a. dans $\{0, 1\}$ pour $i \leq n$ avec n un entier. Les X_i sont indépendantes. On suppose que la suite les Z_i ont une constante loi marginale, c'est-à-dire $p(Z_i = 1) = p$ pour tout i mais les Z_i ne sont pas nécessairement indépendantes. On suppose seulement que Z_n est indépendante de X_n .

1. Que vaut la capacité de ce canal quand $n = 1$?
2. Que vaut la capacité de ce canal quand les Z_i sont indépendantes ?
3. Montrer que la capacité de ce canal quand les Z_i ne sont pas indépendantes est toujours supérieure à la capacité calculée à la question d'avant.

Exercices complémentaires

Exercice 4. *De quel canal il s'agit ?*

Un canal binaire à effacement avec entrée x et sortie y a une matrice de transition suivante.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - q & 0 \\ q & q \\ 0 & 1 - q \end{pmatrix}$$

1. Quelle est l'information mutuelle $I(X, Y)$ entre l'entrée et la sortie pour une distribution $(p, 1 - p)$ en entrée ?
2. Montrer que la capacité de ce canal est $C = 1 - q$ bits

Exercice 5. *Capacité et code à répétition.*

On considère un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p = 0.1$ et on considère le code à répétition de longueur 3 et son algorithme de décodage associé. On considère maintenant l'encodage, le canal et le décodage comme un seul canal.

1. Quelle est la matrice de transition de ce nouveau canal ?
2. Quelle est la capacité de ce canal ?
3. Quelle est la capacité du canal initial ?

Exercice 6. *Deux canaux successifs.*

On considère que deux canaux binaires symétriques de même capacité sont reliés en cascade.

1. Quelle est la capacité du canal complet
2. Quelle est la capacité d'un seul canal pour $p = 0.1$ et du canal complet (avec les deux canaux successifs) ?