UVSQ - Université Paris-Saclay le 29/04/2024

Master 1 Mathématiques 2023–2024
Théorie de l'Information – Examen final – 2h

Les documents ne sont pas autorisés, à part une feuille recto-verso. Tout support numérique est interdit. L'examen a 23 points, mais la note sera ramenée sur 20 sans multiplication. Toute erreur dans le sujet sera prise en compte dans la correction. Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (10 points)

1 *(1 point)* Donner la définition d'un bit d'information.

2 *(1,5 points)* Montrer que pour toute v.a X dans $\mathcal{X}$ où $|\mathcal{X}| = k$, on a

$$H(X) \leq \log_b(k)\,.$$

3 *(3 points)* Montrer le premier théorème de Shannon, i.e. pour toute source discrète sans mémoire, il existe un codage de source déchiffrable dont l'efficacité est arbitrairement proche de 1.

4 *(1,5 points)* En utilisant la décomposition des canaux symétriques en canaux fortement symétriques, donner la capacité du canal binaire symétrique **à effacement** de probabilité d'erreur p et de probabilité d'effacement p_∞.

5 *(3 points)* Donner la définition des codes de Reed-Solomon. Rappeler la définition d'un code MDS (Maximum Distance Separable) puis montrer que les codes de Reed-Solomon sont des codes MDS (sous certaines conditions à donner).

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite $aaaaaaaa$... de longueur n.

1 *(1 point)* Donner le découpage donné par l'algorithme de Lempel-Ziv.

2 *(1,5 point)* Combien de bits sont nécessaires pour encoder l'indice du i-ème mot du dictionnaire ? Justifier précisément.

3 *(1 point)* En déduire le nombre de bits nécessaires pour encoder la suite avec Lempel-Ziv.

4 *(1,5 points)* Décrire complètement la suite compressée, de manière à ce que le décodage soit unique. C'est à dire qu'il n'y ait aucun doute pour décompresser la suite reçue, en partant du principe qu'on utilise toujours Lempel-Ziv.

Exercice 2 (3 points)

Soit le code $\mathcal{C}$ de matrice génératrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 *(2 points)* Donner tous les syndromes des mots de poids 1.

2 *(1 point)* Décoder le mot 1111011.

Exercice 3 (5 points)

Soit n un entier pair et soit q une puissance d'un nombre premier. Soient U et V deux codes linéaires sur $\mathbb{F}_q$, de longueur $n/2$, de dimension k_U et k_V respectivement et de distance minimale respectivement d_U et d_V. On définit alors

$$(U, U+V) := \{(u, u+v), u \in U \text{ et } v \in V\}$$

1 *(1 point)* Montrer que $(U, U+V)$ est un code linéaire.

2 *(2 points)* Donner la dimension de $(U, U+V)$. Justifier.

3 *(2 points)* Donner la distance minimale de $(U, U+V)$. Justifier.