Théorie de l'Information

Contrôle Continu 2

Yann Rotella
yann.rotella@uvsq.fr

9 mai 2023

Durée : 2h

Toute erreur dans le sujet sera prise en compte dans la correction. Tout document papier autorisé. Tout support numérique est interdit. Toute tentative de triche donnera lieu à un 0.

1 Questions de cours (7 points)

1 *(1 point)* Donner les paramètres du code de Hamming.
2 *(2 points)* Montrer pourquoi un code de Hamming a telle longueur, telle dimension et telle distance.
3 *(2 points)* Enoncer le théorème de la borne de Singleton et montrer le.
4 *(2 points)* Donner un exemple de code de dimension 7, de longueur 4 et de distance minimale 4 et donner une matrice génératrice.

2 Code correcteur binaire et décodage (8 points)

On considère le code binaire $\mathcal{C}$ engendré par la matrice suivante.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 *(2 points)* Quelle est la longueur et la dimension de ce code ? Ce code est-il systématique ?
6 *(2,5 points)* Quelle est sa distance minimale ? Donner un mot qui n'est pas décodable, justifier.
7 *(1 point)* Donner une matrice de parité du code $\mathcal{C}$.
8 *(1 point)* Rappeler le principe du décodage par syndrome.
9 *(1,5 points)* Donner les représentants utilisés dans le décodage par syndrome pour au moins deux classes d'équivalence différentes, justifier.

3 Problème (5 points)

On se place sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, on fixe un entier n et un ensemble de ℓ points distincts α_j pour j allant de 1 à ℓ.

On considère

$$\mathcal{C} = \left\{ (c_0, \dots, c_{n-1}), \sum_{0 \leq i < n} c_i \alpha_j^i = 0, 1 \leq j \leq \ell \right\}$$

10 *(1 point)* Montrer que $\mathcal{C}$ est un code linéaire.
On admet que si $F(\alpha_1) = \dots = F(\alpha_\ell) = 0$, alors $P = \prod_j (X - \alpha_j)$ divise F.
11 *(2 points)* Montrer que le code est de dimension $n - \ell$ (considérer F/P).
12 *(2 points)* Donner la matrice de parité de $\mathcal{C}$.