

Théorie de l'Information

Contrôle Continu 1

Yann ROTELLA
yann.rotella@uvsq.fr

13 mars 2022

Durée : 2h30

Toute erreur dans le sujet sera prise en compte dans la correction. Tout document papier autorisé. Tout support numérique est interdit. Toute tentative de triche donnera lieu à un 0.

1 Questions de cours

Pour chacune des questions suivantes, justifier votre réponse. Toute réponse non justifiée vaut 0. Chaque question vaut 1 point.

Question 1 Soit un code préfixe dont les K mots ont pour longueurs n_1, n_2, \dots, n_K , l'égalité

$$\sum_{k=1}^K 2^{-n_k} = 1$$

1. est toujours vraie
2. est toujours fausse
3. est parfois vraie

Question 2 Parmi les codes suivant, le(s)quel(s) ne peuvent pas être des codes de Huffman ?

1. $\{0, 10, 11\}$
2. $\{01, 10, 11, 001\}$
3. $\{01, 10\}$

Question 3 L'entropie d'une source est :

1. La quantité d'information maximale qu'elle produit
2. La quantité d'information moyenne qu'elle produit
3. La quantité d'information minimale qu'elle produit

Pour les question 4 à 8, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

Question 4 Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. On a $H(X) = H(5X)$.

Question 5 Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. On a $H(X) = H(X^2)$.

Question 6 Soit X une variable aléatoire dans \mathcal{X} , et Y une variable aléatoire réelle dans \mathcal{Y} , avec $|\mathcal{X}| = 8$ et $|\mathcal{Y}| = 16$. On a $H(X) \leq H(Y)$.

Question 7 En reprenant les définitions de la question 6, si Y suit une loi uniforme, on a $H(Y) = 3$.

Question 8 En reprenant les définitions de la question 6, si $H(X) = 3$, alors X suit une loi uniforme.

2 Information mutuelle

Soit X une variable aléatoire correspondant à la main d'un joueur de poker (une main consiste tout simplement en la possession de 2 cartes, qui valent 1 (As), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et qui peuvent être Cœur, Trèfle, Carreau ou Pique), correspondant aux événements "le joueur a une mauvaise main" (0) et "le joueur a une bonne main" (1). Une bonne main consiste en la possession de :

- Une paire ou bien
- deux cartes de même couleur ou bien
- deux cartes parmi As, Roi ou Dame dans sa main.

Question 9 (1,5 points) Donner une expression de $H(X)$ et montrer sans trop de calculs que $0,55 < H(X) < 0,8$. On pourra utiliser les approximations $\log_2(7) = 2,8$ et que $\log_2(3) = 1,6$.

On suppose maintenant que le joueur peut ou bien "se coucher", ou bien "miser exactement la valeur demandée" ou bien "relancer". De plus on sait que : quand le joueur a une mauvaise main il se couche une fois sur 2, mise la valeur demandée une fois sur deux et ne relance jamais. Quand le joueur a une bonne main il ne se couche jamais, mise la valeur demandée une fois sur 2 et relance une fois sur 2.

Question 10 (2,5 points) Quelle proportion d'information sur X et sur l'ensemble des mains possibles apprenons nous en moyenne après que le joueur ait joué sa première mise ?

Question 11 (1 point) Donner une stratégie qui minimise la quantité d'information transmise aux autres joueurs.

3 Codage de Source

Question 12 (3 points) Donner un code déchiffrable optimal (pour lequel la longueur moyenne du code est égale à l'entropie) pour une source d'alphabet $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dont la distribution de probabilité est $p(a) = 0,125$, $p(b) = 0,0625$, $p(c) = 0,0625$, $p(d) = 0,0625$, $p(e) = 0,125$, $p(f) = 0,25$, $p(g) = 0,0625$, $p(h) = 0,25$.

Question 13 (4 points) Donner l'encodage de la suite `abcaacbbbeaccaacbbbbaac` par l'algorithme de Lempel-Ziv vu en cours. Quel est le taux de compression ? Donner le dictionnaire à la fin de l'algorithme.